Teorem:

X, t.d. ni $N(\mu, \sigma^2)$ dağılımına sahip olsun. Bu takdirde X'in M.G.F. nu;

$$M_X(t) = e^{t\mu + (\sigma^2 \cdot t^2)/2}$$

İspat: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ise

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

şeklindedir.

$$\Longrightarrow M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \cdot f(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot(x-\mu)^2/\sigma^2}\, dx$$

olacaktır. Buradan; $(x-\mu)/\sigma = s$ dönüşümü yapılırsa, $x = \sigma . s + \mu$ ve $dx = \sigma . ds$ olur.

Böylece;

$$M_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\cancel{\sigma}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t.(\sigma . s + \mu)} \cdot e^{-\frac{s^2}{2}} \cdot \cancel{\sigma} . ds$$

$$= e^{t.\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\cdot(s^2 - 2.\sigma.t.s)} . ds$$

$$= e^{t\mu} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\cdot\left[\underbrace{(s-\sigma.t)^2 - \sigma^2 t^2}_{\mp \sigma^2 t^2 \text{ yazalım.}}\right]} ds$$

$$= e^{t\mu} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(s-\sigma t)^2} \cdot e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \cdot ds$$

$$= e^{t\mu + \sigma^2 t^2/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(s-\sigma t)^2} \cdot ds$$

Burada $s - \sigma . t = u$, $ds = du$
alınırsa,

$$= e^{t.\mu + \sigma^2 t^2/2} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} . \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}.u^2} . du}_{=1}$$

st. normal dağılıma
$u \sim N(0, 1)$ sahip

Sonuç olarak

$\Rightarrow$ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ile

$$\boxed{M_x(t) = e^{t.\mu + \sigma^2 t^2/2}}$$ elde edilir.

X, t.d. ni $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ dağılımına sahipse $M_X(t) = e^{t.\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$ (İspatı daha önce M.G.F. konusunda verilmiş idi.)

Teorem: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ dağılımına sahip, a ve b reel sayılar olmak üzere $Y = aX + b$ t.d.nin dağılımı $Y \sim N(a.\mu + b \,;\, a^2 \sigma^2)$ dır.

İspat: Y, t.d. nin M.G.F. nu

$$M_Y(t) = M_{aX+b}(t) = E\left(e^{(aX+b).t}\right)$$

$$= E\left(e^{a.t.X} . e^{b.t}\right) = E\left(e^{a.t.X}\right) . e^{b.t}$$

$$= M_X(a.t) . e^{b.t}$$

$$= e^{a.t.\mu + \frac{\sigma^2 a^2 t^2}{2}} e^{b.t}$$

$$= e^{(a.\mu + b).t + \frac{\sigma^2 a^2 . t^2}{2}} \text{ olur.}$$

O halde Y t.d. nin parametreleri, $M_Y(t)$'deki t ve $\frac{t^2}{2}$'nin katsayılarıdır.

Yani $E(Y) = a.\mu + b$, $V(Y) = a^2.\sigma^2$ olur.

$\Longrightarrow Y \sim N(a\mu + b \,;\, a^2.\sigma^2)$ dır.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ t.d. leri birbirinden bağımsız olarak $X_i \sim N(\mu_i \,;\, \sigma_i^2)$ $i = 1, 2, \ldots, n$ ise $Y = X_1 + \ldots + X_n$ olarak tanımlanan t.d. nin dağılımı $Y \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i \,;\, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)$ olur.